255. 函數方程式 $F(x+y)+F(x-y)=2\{F(x)+F(y)\}$ ノ解ニツイテ

北川　敏男（阪大）

1. 南雲教授が、筆者ニ，次ノヤウナ御話シガアッタノヲ機縁ニ，表題ノ函數方程式ヲ変數が実數ノ場合ニ就イテ考ヘテ見マシタ。ソノ御話シトイフノハ

"Neumann ガ. Linear metric space デ Norm ガ定義サレテヰルトキ

$$\|\xi+\eta\|^2+\|\xi-\eta\|^2=2\{\|\xi\|^2+\|\eta\|^2\}$$

ガ成立スルコトガ内積 (ξ,η) ヲ Hilbert space ニ於ケル如ク定義シウルタメノ必要且ツ充分ナ條件デアルトイフ結果ヲ得テヰル。" (Annals of Math. Vol. 36, No. 3 参照)

2. 今任意ノ實數 x, y ニ對シテ

$$F(x+y)+F(x-y)=2\{F(x)+F(y)\} \text{------------} (1)$$

ヲ満タス函數 $F(x)$ ヲ考ヘル。　一如何ナル点ノ近傍デモ

Lebesgue ノ意味デ可測デナイ $F(x)$ デ (1) ガ満足サレ得ルコトハ，函数方程式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

ノ Hamel ノ解ヲ $f(x)$ トシテ $F(x)=\alpha f(x)^2$ ト置ケバヨイ。

従ッテ或ル有限區間デ Lebesgue ノ意味デ可測ナ解ヲ求メテ見ルコトガ意味ガアル。

今主張ニ反シテ、或ル有限區間デ有界デナイトスル。従ッテ一点 x_1 ガアッテ，ソノ任意ノ近傍ニ於イテ $F(x)$ ガ有界デナイトシテヨイ。然ラバ任意ノ正数 n, ε ニ對シテ

$$\begin{cases} |h|<\varepsilon \\ |F(x_1+h)|>n \end{cases}$$

ナル如キ h ガアリ、與ヘラレタ函数方程式カラ

$$\left|F(x_1+h+y)+F_1(x+h-y)\right|>n+\delta$$

ヲ得ル。コノ式カラ

$$mes \underset{x}{E}\left\{\left|F(x)\right|>\frac{n+\delta}{2}\ ;\ x_1-a,\ x_1+a\right\}$$
$$>\delta-\varepsilon\ (>0)$$

ナルコトガ容易ニワカル。 $n\to\infty$ トヤルコトニヨッテ矛盾。

定理. (1) ヲ充ス Lebesgue 可測ナル解ハ

$$F(x)=ax^2 \qquad (a\text{ ハ任意ノ實數})$$

デ與ヘラレル。

証明. 補助定理3ニ由リ任意ノ有限區間デ有界ニシテ且ツ可測ナルコトカラ、任意ノ有限區間デ Lebesgue 可積分トナル。從ッテ補助定理1ノ證明ト同様ニシテ $F(x)$ ハ連續。從ッテ(3)ニヨリ $F_1(u)$ ハ連續微分可能ダカラ, (4)式ニヨリ $F(x)$ ソノモノガ連續微分可能。(1) カラ

$$F'(x+y)+F'(x-y)=2F'(x)$$

$$F'(x+y)-F'(x-y)=2F'(y)$$

ヲ得, 從ッテ連續函數 $F'(x)$ ハ

$$F'(x+y)=F'(x)+F'(y)$$

ナル函數方程式ヲ充ス。故ニ $F'(x)=a_1x$

依ッテ $F(x)=ax^2$

3. 補助定理1. (1) ヲ充ス $F(x)$ ガ殆ンド到ルトコロデ零ナラバ $F(x)$ ハ恒等的ニ零デアル。

證明. $F(x)$ ガ殆ンド到ルトコロデ零ダカラ、$F(x)$ ハ任意ノ有限區間デ Lebesgue 可積分デアル。

(1) ノ兩辺ヲ y ニ關シテ次ノ如ク積分スル:

$$\int_0^u F(x+y)\,dy+\int_0^u F(x-y)\,dy=2F(x)u+2\int_0^u F(y)\,dy \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

今簡單ノタメニ

$$\int_0^u F(t)\,dt=F_1(u) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ト置ケバ

$$F_1(x+u)-F_1(x-u)=2uF(x)+2F_1(u) \quad \text{-----------} (4)$$

(4) ノ右辺ハ，x ノ連続函数ダカラ、$F(x)$ モ又然リ。依ッテ $F(x)$ ハ恒等的ニ零デアル。

補助定理 2. (1) ノ解 $F(x)$ ガ有限区間 $[0, A]$ デ *Lebesgue* ノ意味デ可測デアレバ任意ノ区間デ又然リ。

証明. コノコトハ (1) 式ヨリ得ラレル次ノ二式ニ依リ明ラカデアル。

$$F(2x)=4F(x)$$

$$F(-x)=F(x)$$

補助定理 3. (1) ノ解ガ、若シ $[0, A]$ デ *Lebesgue* ノ意味デ可測デアレバ，任意ノ有限区間デ有界デアル。

証明. コレニ関シテハ，S. *Kaczmarz* (*Fundamenta* VI) ノ方法ヲ *modify* スレバヨイ。乃チ，

(1) ノ解ニシテ殆ンド到ルトコロ零ナルモノハ，補助定理 1 ニヨリ恒等的ニ零トナルカラ則チ己ム。然ラザルトキニハ，適当ナ区間 $(-a, a)$ ガアッテ

$$mes \underset{x}{E}\{F(x)>\delta;\ -a\leq x\leq a\}>0$$

ナル如キ正数 δ, a ガアル。 コレハ若シ要スレバ，$F(x)$ ノ代リニ，$-F(x)$ ヲ考ヘルコトニヨリ常ニ充サレル。